

Capitalización actuarial y reserva matemática

por Eliseo César Tulián

Profesor Titular de Matemática Financiera en
la Facultad de Ciencias Económicas de la U.
N. de Cuyo.

"El río está a la vez en todas partes, en su origen y su desembocadura, en la cascada, alrededor de la barca, en los rápidos, en el mar, en la montaña, en todas partes simultáneamente". HERMANN HESSE, Siddhartha.

El matemático suizo Dr. Heinrich Turler en el Cuaderno N^o. 9 del Instituto Nacional de Reaseguros de la República Argentina, al referirse a la reserva matemática, dice que se trata de una cuenta del pasivo en el balance de la compañía de seguros. En su totalidad pertenece a los asegurados, quienes pueden hacerla exigible en cualquier momento. El mismo autor dice, en otras palabras, que la reserva matemática es un patrimonio del asegurado administrado por el asegurador o, si se quiere, la reserva matemática está constituida por fondos anticipados por los asegurados, para cubrir riesgos futuros.

En el mismo sentido, el Profesor José González Galé cuestiona la denominación de la reserva matemática, porque el término *reserva* sugiere la idea de un *sobrante* puesto aparte para cubrir *contingencias imprevistas* que pueden ocurrir o no. Este autor propone como denominación más apropiada la de *valores de póliza*. Esta misma denominación es empleada por el Profesor Eugenio Levi en su Curso de Matemática Financiera y Actuarial.

La reserva, considerada como "valor de póliza", da una idea más amplia de la aplicación del concepto: además de calcularla para la confección del balance, se puede calcular también como base para regular las relaciones entre las partes en casos de rescisión o modificación del contrato.

Respecto del procedimiento para su cálculo, puede usarse alternativamente el método prospectivo o el método retrospectivo, como en la generalidad de las operaciones financieras. Por el método prospectivo, la reserva matemática se calcula como la diferencia entre los futuros compromisos de la aseguradora y los futuros compromisos del asegurado, actualizados actuarialmente a la fecha de cálculo. La valoración retrospectiva, en cambio, plantea la reserva como la diferencia entre los ingresos y los egresos de la aseguradora desde la fecha inicial hasta el momento del cálculo, capitalizados con la respectiva tasa técnica de Interés.

Relacionado con el cálculo, es interesante tener en cuenta lo que dice el Dr. Heinrich Turler en el trabajo ya citado: existe un principio básico para la matemática actuarial, llamado *principio de equivalencia actuarial*. En virtud de este principio, el valor actual de las primas futuras, más la reserva matemática, debe ser igual al valor actual de los gastos en concepto de prestaciones.

Estos procedimientos de cálculo están pensados más desde el punto de vista de la aseguradora que del asegurado. El hecho de que la reserva matemática puede entenderse como un patrimonio del asegurado administrado por la aseguradora, nos sugiere un procedimiento de cálculo alternativo, basado en el concepto de *ahorro o inversión actuarial*. Este trabajo describe ese procedimiento, que permite llegar a expresiones recursivas generales, no solo dentro de las operaciones actuariales, sino también en relación con las operaciones ciertas, a tal punto que, en esta materia, lo cierto puede ser considerado como un caso particular de lo aleatorio.

El Profesor José González Galé hace referencia al método de recurrencia o *Método de Fourret* atribuido al actuario francés Georges Fourret. Se trata de una expresión recursiva análoga a las incluidas por Eugenio Levi en su libro. Nuestra propuesta, que suponemos original, se basa en la idea de la *capitalización actuarial*. Creemos que ayuda no sólo a comprender mejor el concepto de reserva matemática, sino que echa luz sobre la generalidad de las operaciones actuariales.

A. La Capitalización actuarial

En Matemática Financiera resulta más sencillo definir primero el factor de capitalización y luego, a partir de éste, el factor de actualización. No sucede lo mismo en Matemática Actuarial: el primer paso es definir la actualización.

1. El factor de actualización

La operación actuarial elemental es la del *capital diferido en caso de vida*. Se trata de una prestación futura que sólo tendrá lugar si el eventual beneficiario sobrevive a la fecha del vencimiento.

Sea un capital unitario, diferido por n años, para una persona de edad x , sujeto a la condición de supervivencia. Su valor actual a la edad de origen x , es una variable aleatoria que puede tomar 2 valores: cero, si la prestación no tiene lugar y v^n , factor de actualización unitario, en caso de supervivencia del beneficiario. A estas dos posibilidades se asignan las respectivas probabilidades: ${}_nq_x$ y ${}_np_x$. La esperanza matemática de esta variable aleatoria, simbolizada con ${}_nE_x$, resulta entonces:

$${}_nE_x = v^n {}_np_x = \frac{v^n I_{x+n}}{I_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

donde I_x y I_{x+n} son ordenadas de la función de supervivencia, a partir de una cantidad inicial l_0 de individuos de edad cero, I_x es la cantidad de sobrevivientes a la edad x . En tanto, $D_x = v^x I_x$ es un valor de comutación incluido en las tablas de mortalidad.

Si en lugar de una prestación unitaria, el capital comprometido fuera C , su valor actual sería C veces mayor. En otras palabras, se aplica sobre el capital C el factor ${}_nE_x$, *factor de actualización actuarial*.

Para el caso particular en que el diferimiento es por un año, podemos convenir en simbolizar con E_x al factor de actualización, dando por entendido el subíndice unitario. Nos parece oportuno revisar la denominación de estos factores. En tal sentido, proponemos llamar a E_x *factor de actualización actuarial* y a ${}_nE_x$, *factor de actualización actuarial múltiple*.

2. El factor de capitalización

Como en el caso de las operaciones ciertas, el factor de capitalización es el valor recíproco del factor de actualización. En efecto, si V_0 es el valor actual de V_1 , V_1 es el capital final de V_0 :

$$V_0 = V_1 E_x \quad V_1 = V_0 E_x^{-1}$$

En consecuencia:

$$\bar{E}_x^{-1} = \frac{D_x}{D_{x+1}} \quad [1]$$

es el factor de capitalización actuarial. Para n años, ${}_n\bar{E}_x^{-1}$ es el factor de capitalización múltiple.

Mientras el factor de actualización puede interpretarse clara y directamente como una esperanza matemática, su recíproco, el factor de capitalización actuarial, no puede ser interpretado a la luz del mismo concepto.

Con una tasa de interés r , el factor de capitalización para operaciones ciertas es $(1 + r)$. Es posible dar al factor de capitalización actuarial una expresión con la misma estructura.

3. La tasa actuarial

Si la expresión [1] se escribe en términos de la función de supervivencia y del factor de actualización:

$$\bar{E}_x^{-1} = \frac{v^x l_x}{v^{x+1} l_{x+1}} = \frac{(1 + r) l_x}{l_{x+1}}$$

Si se tiene en cuenta la relación $l_x = l_{x+1} + d_x$, siendo d_x la cantidad de fallecidos entre las edades x y $x + 1$, y se cambia la notación del primer miembro:

$$1 + s_x = \frac{(1 + r) (l_{x+1} + d_x)}{l_{x+1}}$$

$$1 + s_x = (1 + r) \left[1 + \frac{d_x}{l_{x+1}} \right]$$

$$\rho_x = \frac{d_x}{l_{x+1}}$$

$$1 + s_x = (1 + r) (1 + \rho_x)$$

El factor de capitalización actuarial tiene ahora la misma estructura formal del factor de capitalización para operaciones ciertas. La tasa actuarial tiene

dos componentes: una constante, la tasa de interés, y otra variable ρ_x . Esta componente variable puede ser denominada *tasa de participación*: es el cociente entre el número de fallecidos a la edad x y los sobrevivientes a la edad $x + 1$.

La tasa actuarial s_x es siempre mayor que la tasa de interés, desde que la tasa de participación es siempre positiva. A esta última tasa puede dársele una sencilla interpretación:

Al momento 0, l_x individuos de la misma edad, depositan cada uno, una unidad monetaria. Al cabo del año, el capital se incrementa por los intereses, según la tasa r :

$$\begin{array}{ccc} l_x & & l_x (1 + r) \\ \hline 0 & & 1 \end{array}$$

El depósito inicial y el correspondiente interés de los d_x fallecidos en el año, se distribuye entre los l_{x+1} sobrevivientes. Esta participación es la segunda componente de la tasa actuarial.

Tampoco ahora puede interpretarse al factor de capitalización actuarial como una esperanza matemática. Es, en todo caso, el mejor de los dos posibles resultados, cuando la recuperación del capital está condicionada a la supervivencia. Se puede plantear otra variable aleatoria: se deposita una unidad monetaria que al cabo del año se incrementará en la medida de la tasa actuarial, en caso de vida, o se perderá totalmente en caso de muerte. Sea R esa variable aleatoria:

$$R \begin{cases} (1 + s_x) & 0 \\ P_x & q_x \end{cases}$$

La esperanza matemática de los dos posibles resultados es:

$$E(R) = (1 + s_x) \rho_x = \frac{D_x}{D_{x+1}} \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 + r$$

el factor de capitalización para operaciones ciertas. Es decir, la tasa de interés r es el beneficio esperado entre ganar la tasa actuarial y perder el capital unitario depositado.

Salvo para las primeras edades, la tasa de participación es una función creciente: el numerador crece y el denominador decrece con x . Dicho de otra forma, con el pasar de los años habrá más para repartir entre cada vez menos

sobrevivientes. Con la función de supervivencia de la Tabla de Mortalidad de Mendoza 1980, de Antonio Carim Martín, el siguiente cuadro muestra las tasas actuariales para distintas edades, en tanto por ciento, asociadas a una tasa de interés del 6% anual.

X	S _x	X	S _x	X	S _x	X	S _x
0	9,67	25	6,14	50	7,01	75	13,42
1	6,35	26	6,15	51	7,10	76	14,05
2	6,17	27	6,17	52	7,19	77	16,22
3	6,07	28	6,18	53	7,28	78	17,63
4	6,04	29	6,19	54	7,39	79	17,63
5	6,04	30	6,21	55	7,50	80	18,70
6	6,04	31	6,23	56	7,63	81	20,13
7	6,04	32	6,25	57	7,76	82	21,59
8	6,04	33	6,27	58	7,91	83	22,95
9	6,04	34	6,29	59	8,06	84	24,56
10	6,04	35	6,31	60	8,23	85	26,37
11	6,05	36	6,34	61	8,42	86	28,14
12	6,05	37	6,36	62	8,62	87	30,09
13	6,06	38	6,39	63	8,83	88	32,19
14	6,06	39	6,43	64	9,07	89	34,63
15	6,06	40	6,46	65	9,32	90	37,32
16	6,07	41	6,50	66	9,60	91	40,57
17	6,08	42	6,54	67	9,90	92	44,39
18	6,08	43	6,58	68	10,22	93	49,13
19	6,09	44	6,63	69	10,57	94	55,15
20	6,10	45	6,68	70	10,96	95	63,20
21	6,10	46	6,74	71	11,39	96	77,30
22	6,11	47	6,80	72	11,82	97	107,35
23	6,12	48	6,87	73	12,31	98	223,81
24	6,13	49	6,94	74	12,84	100	∞

Hasta la edad 8 la tasa es decreciente y crece a partir de esa edad: es que para esa edad la función d_x , numerador de la tasa de participación, se minimiza.

4. El factor de capitalización múltiple

El factor de capitalización para n años, como valor recíproco del factor de actualización resulta de dividir D_x por D_{x+n} . Puede pensarse en un factor anual equivalente, es decir, que aplicado n veces produzca el mismo resultado:

$${}_n\bar{E}_x^{-1} = \frac{D_x}{D_{x+n}} = (1 + s_{x,n})^n$$

$$\frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} \cdot \frac{D_{x+2}}{D_{x+3}} \cdots \frac{D_{x+n-1}}{D_{x+n}}$$

$$(1 + s_x)(1 + s_{x+1})(1 + s_{x+2}) \cdots (1 + s_{x+n-1}) = (1 + s_{x,n})^n$$

El factor $(1 + s_{x,n})$ es, entonces, la media geométrica de los factores periódicos $(1 + s_{x+k})$, en tanto $s_{x,n}$ es la tasa actuarial promedio. Para la edad $x = 20$ y con $n = 10$, la tasa promedio resulta:

$$s_{20,10} = \left[\frac{D_{20}}{D_{30}} \right]^{0,1} - 1 = 0,0614$$

con el 6% anual de interés y la tabla de mortalidad ya citada. Para la edad $x = 60$ y el mismo valor de n , la tasa promedio resulta significativamente mayor:

$$s_{60,10} = \left[\frac{D_{60}}{D_{70}} \right]^{0,1} - 1 = 0,0928$$

B. Reserva matemática para un capital diferido

Sea C un capital diferido por n años que se contrata mediante el pago de n primas adelantadas. El valor de la prima pura anual resulta:

$$P = C \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad [2]$$

La reserva matemática, calculada por el método prospectivo, al cabo del primer año resulta de restar el compromiso futuro de la aseguradora, el compromiso futuro del asegurado, actualizados:

$$V_1 = C \cdot {}_{n-1}E_{x+1} - P \cdot {}_{n-1}a_{x+1}$$

donde ${}_{n-1}a_{x+1}$ es el factor de actualización de una renta adelantada de $n-1$ términos, a la edad $x+1$. Si se expresa el capital en función de la prima, según la [2]:

$$V_1 = P \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} - P \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}}$$

$$V_1 = P \frac{N_x - N_{x+1}}{D_{x+1}} = P \frac{D_x}{D_{x+1}} = P (1 + s_x)$$

Al final del segundo año, la reserva acumulada es:

$$V_2 = P \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \frac{D_{x+n}}{D_{x+2}} - P \frac{N_{x+2} - N_{x+n}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = P \frac{N_x - N_{x+2}}{D_{x+2}} = P \frac{D_x + D_{x+1}}{D_{x+2}} = P \left[\frac{D_x}{D_{x+1}} \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} + \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} \right]$$

$$V_2 = [P (1 + s_x) + P] (1 + s_{x+1})$$

La segunda reserva puede ser expresada en función de la primera:

$$V_2 = (V_1 + P) (1 + s_{x+1})$$

En forma análoga, las reservas sucesivas se expresan:

$$V_3 = (V_2 + P) (1 + s_{x+2})$$

$$V_4 = (V_3 + P) (1 + s_{x+3})$$

Se puede generalizar la expresión recursiva de la reserva:

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) \quad [3]$$

Como la tasa actuarial es siempre positiva, la reserva matemática en este caso es siempre creciente.

Resulta interesante comparar la [3] con la expresión recursiva del capital final de una renta cierta adelantada:

$$A_{k+1} = (A_k + c) (1 + r)$$

Con el mismo término, esto es, la cuota de la renta cierta igual a la prima de la reserva, la capitalización actuarial es mayor porque la tasa actuarial es mayor que la tasa de interés. El siguiente cuadro muestra la evolución de la renta cierta y de la reserva, para una misma tasa de Interés del 6% y con la misma tabla de mortalidad en la que nos apoyamos. Para hacer más completa la comparación, se consideran dos edades: 20 y 60 años, para un capital diferido de 1.000 unidades monetarias, pagadero mediante 10 primas anuales.

x = 20			x = 60		
k	Reserva	Renta cierta	k	Reserva	Renta cierta
1	75,27	75,21	1	63,18	61,87
2	155,16	154,93	2	131,78	127,46
3	239,93	239,43	3	206,53	196,98
4	329,91	329,00	4	288,31	270,67
5	425,44	423,95	5	378,11	348,78
6	526,88	524,59	6	477,18	431,58
7	634,63	631,28	7	586,95	519,35
8	749,09	744,36	8	709,18	612,38
9	870,72	864,23	9	846,01	710,99
10	1000,00	991,29	10	1000,00	815,52

Como era de esperar, la diferencia es más significativa para edades mayores: la tasa actuarial es creciente con respecto a la edad. Para la edad 20, la capitalización actuarial supera a la renta cierta en poco menos del 0,9%; para los 60, la diferencia es superior al 22%.

C. Renta temporaria con prima única

Sea c el término de una renta vitalicia vencida, temporaria por n años, que se contrata mediante el pago de una prima única U . Este pago único resulta:

$$U = c \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad [4]$$

La reserva matemática, calculada por el método prospectivo, resulta, al cabo del primer año:

$$V_1 = c \cdot {}_{n-1}a_{x+1}$$

donde ${}_{n-1}a_{x+1}$ es el factor de actualización de una renta vencida de $n-1$ términos a la edad $x+1$. Si se expresa la cuota en función de la prima única, teniendo en cuenta la [4]:

$$V_1 = U \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \frac{N_{x+2} - N_{x+n+1}}{D_{x+1}}$$

$$V_1 = U \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} - D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \frac{D_x}{D_{x+1}}$$

$$V_1 = U \left[1 - \frac{D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \right] \frac{D_x}{D_{x+1}}$$

$$V_1 = U (1 + s_x) - c$$

En forma análoga, puede plantearse el cálculo de la reserva matemática acumulada hasta el segundo año:

$$V_2 = U \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \frac{N_{x+3} - N_{x+n+1}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = U \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} - D_{x+1} - D_{x+2}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \frac{D_x}{D_{x+1}} \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = U \left[1 - \frac{D_{x+1} + D_{x+2}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \right] \frac{D_x}{D_{x+1}} \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = U (1 + s_x) (1 + s_{x+1}) - c (1 + s_{x+1}) - c$$

$$V_2 = [U (1 + s_x) - c] (1 + s_{x+1}) - c$$

$$V_2 = V_1 (1 + s_{x+1}) - c$$

No es difícil demostrar que los sucesivos niveles de reserva acumulada pueden expresarse:

$$V_3 = V_2 (1 + s_{x+2}) - c$$

$$V_4 = V_3 (1 + s_{x+3}) - c$$

lo que permite generalizar la expresión recursiva de la reserva:

$$V_{k+1} = v_k (1 + s_{x+k}) - c \quad [5]$$

También acá resulta interesante comparar la expresión [5] con la evolución del saldo en las rentas ciertas. Si se deposita un capital V , a una tasa de interés r , de modo que se agote con n extracciones iguales a c , el saldo del capital evoluciona según la expresión:

$$V_{k+1} = V_k (1 + r) - c$$

análoga a la expresión recursiva de la reserva. Como una y otra valuación se hacen con tasas distintas, uno de los parámetros debe ser distinto: si la inversión inicial es la misma y se toma el mismo término para las dos rentas, el capital de la renta cierta se agota antes que el de la renta vitalicia; alternativamente, con la misma inversión inicial, para que las dos rentas tengan la misma temporalidad, el término de la renta cierta debe ser menor que el término de la renta vitalicia. Que estas diferencias sean significativas o no, depende de la edad: para edades mayores, la tasa actuarial es significativamente mayor que la tasa de interés.

Si a los 60 años se contrata una renta vitalicia de 1.000 unidades monetarias, temporalía por 10 años, resulta una prima única de 6.187. Si esa misma cantidad se invierte por el mismo tiempo en una renta cierta, el término de la renta se reduce a 840 unidades monetarias. Estos valores han sido calculados con la tabla de mortalidad ya citada, al 6% anual.

D. La reserva en la renta diferida

Se ha visto en primer término la capitalización de la renta vitalicia para alcanzar un determinado capital diferido. En segundo término, se ha planteado

la actualización de una renta vitalicia para determinar la prima única. La valoración de la reserva matemática de una renta diferida resulta de combinar los dos casos analizados.

Sea una renta vitalicia de término J , diferida por m años, que se contrata mediante el pago de una renta vitalicia de término P , temporaria por h años. En los h primeros años, mientras se paga la prima P , la reserva matemática evoluciona como en el primer caso analizado, tomando como capital diferido la prima pura única para una renta inmediata a la edad $x + m$. A partir de la expresión [3]:

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) \quad \text{para } k < h \quad [6]$$

Para el tiempo de vigencia material de la renta de término J , la reserva V_m se va agotando periódicamente como en el segundo caso analizado. De acuerdo con la expresión [5]:

$$V_{m+1} = V_m (1 + s_{x+m}) - J$$

que puede generalizarse escribiendo:

$$V_{k+1} = V_k (1 + s_{x+k}) - J \quad \text{desde } k = m \quad [7]$$

De la consideración simultánea de la [6] y la [7], puede proponerse una expresión más general aún:

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) - J$$

con el siguiente campo de validez: para k mayor que h , P vale cero; para k menor que m , J vale cero.

E. La reserva en el seguro sobre la muerte

Sea un seguro de vida entera, de capital C , para una persona de edad x . Si se contrata mediante el pago de h primas, el importe de cada prima resulta:

$$P = C \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \quad [8]$$

donde M_x es la suma de $d_k v^{k+1}$, desde $k = x$ hasta la última edad de la tabla de mortalidad. Al cabo de un año, la reserva matemática, calculada por el método prospectivo, es:

$$V = C A_{x+1} - P h \cdot a_{x+1}$$

Con A_x se simboliza el factor de actualización del capital asegurado. Si se expresa el capital en función de la prima, a partir de la [8]:

$$V_1 = P \frac{N_x - N_{x+h}}{M_x} - \frac{M_{x+1}}{D_{x+1}} - P \frac{N_{x+1} - N_{x+h}}{D_{x+1}}$$

Como $N_{x+1} = N_x - D_x$ y $M_{x+1} = M_x - C_x$, la reserva puede expresarse:

$$V_1 = P \frac{N_x - N_{x+h}}{D_x} \left[1 - \frac{C_x}{M_x} - 1 \right] + P \frac{D_x}{D_{x+1}}$$

Si la prima del primer término se expresa en función del capital asegurado, teniendo en cuenta la [8]:

$$V_1 = P (1 + s_x) - C \frac{C_x}{D_{x+1}} = P (1 + s_x) - C \frac{vD_x - D_{x+1}}{D_{x+1}}$$

$$V_1 = P (1 + s_x) - C \frac{d_x}{l_{x+1}}$$

La reserva matemática dos años después de contratado el seguro, razonando análogamente, resulta:

$$V_2 = P \frac{N_x - N_{x+2}}{M_x} - \frac{M_{x+2}}{D_{x+2}} - P \frac{N_{x+2} - N_{x+h}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = P \frac{N_x - N_{x+h}}{D_{x+2}} \left[1 - \frac{C_x + C_{x+1}}{M_x} - 1 \right] + P \frac{D_x + D_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = P \frac{D_x + D_{x+1}}{D_{x+2}} - C \frac{C_x + C_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$V_2 = P \left[(1 + s_x)(1 + s_{x+1}) + (1 + s_{x+1}) \right] - C \left[\frac{d_x}{l_{x+1}} (1 + s_{x+1}) + \frac{d_{x+1}}{l_{x+2}} \right]$$

$$V_2 = \left[P (1 + s_x) - C \frac{d_x}{l_{x+1}} + P \right] (1 + s_{x+1}) - C \frac{d_{x+1}}{l_{x+2}}$$

$$V_2 = (V_1 + P) (1 + s_{x+1}) - C \frac{d_{x+1}}{l_{x+2}}$$

No es difícil demostrar, análogamente, que:

$$V_3 = (V_2 + P) (1 + s_{x+2}) - C \frac{d_{x+2}}{l_{x+3}}$$

$$V_4 = (V_3 + P) (1 + s_{x+3}) - C \frac{d_{x+3}}{l_{x+4}}$$

lo que permite generalizar la expresión recursiva de la reserva matemática para el seguro sobre la muerte:

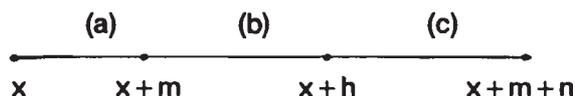
$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) - C \frac{d_{x+k}}{l_{x+k+1}}$$

En el último término, el capital asegurado está multiplicado por la tasa de participación ρ_{x+k} :

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) - C \rho_{x+k} \quad [9]$$

En este caso, la participación de los supervivientes es doble: tienen una participación positiva por medio de la tasa actuarial, en la reserva anterior, la última prima y los intereses, correspondientes a los d_{x+k} fallecidos en el año; tienen una participación negativa, en la medida de la tasa ρ_{x+k} en las d_{x+k} indemnizaciones iguales a C .

Esta expresión recursiva de la reserva matemática es lo suficientemente general como para aplicarla a cualquier tipo de seguro sobre la muerte. Supóngase, como caso más complejo, el de un seguro diferido por m años, temporario por n , que se paga mediante h primas, con h mayor que m , pero menor que $m+n$, naturalmente. La vigencia formal del seguro puede descomponerse en tres segmentos:



En el segmento (a) no hay indemnizaciones. En consecuencia, la reserva es:

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k})$$

En el segmento (c) no se pagan primas; la reserva resulta:

$$V_{k+1} = V_k (1 + s_{x+k}) - C \frac{d_{x+k}}{i_{x+k+1}}$$

Finalmente, en el segmento (b), con primas e indemnizaciones, se da la situación más general, a la que es aplicable la expresión [9].

F. La ecuación en diferencia

Es importante el aporte del Profesor Antonio Carim Martín cuando desarrolla en forma elegante y rigurosa la Matemática Financiera en términos de las ecuaciones en diferencia. En un trabajo suyo del año 1965, lamentablemente inédito, encontramos la solución de una ecuación en diferencia que puede resolver la expresión recursiva de la reserva matemática. Se trata de la ecuación lineal de primer orden, con coeficientes variables y es de la forma:

$$y_{k+1} - a_k y_k = g_k$$

a cuya solución general se llega sin mayores dificultades:

$$y_k = u_k \left[y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_j}{u_{j+1}} \right] \quad [10]$$

donde u_k es una función de los coeficientes variables:

$$u_k = \prod_{j=0}^{k-1} a_j \quad [11]$$

Para el caso particular que nos ocupa, la expresión de la solución general se simplifica. En algunas expresiones recursivas de la reserva matemática, g_k es una constante: es el caso de una renta vitalicia pagada con prima única, que, desde el punto de vista práctico, no constituye el caso más interesante. Es más particular aún el caso en que g_k es nula: antes de la vigencia material de una renta vitalicia o de un seguro sobre la muerte, ambos diferidos, cuando el asegurado ha cumplido todos sus compromisos.

Se ha visto que la expresión recursiva general para todos los seguros sobre la muerte es de la forma:

$$V_{k+1} = (V_k + P) (1 + s_{x+k}) - C p_{x+k}$$

Y es general no sólo con relación al tipo de seguro, sino también respecto al estado de desarrollo del contrato: si el seguro se paga con una renta temporal, cuando ésta concluye, la expresión vale anulando P ; si el seguro es diferido, antes de la vigencia material, la expresión vale anulando C . Sin embargo esto es así sólo cuando se trata de vincular dos valores consecutivos de la reserva. Si se quiere resolver la ecuación en diferencia, se tropieza con la restricción del comportamiento no homogéneo de la evolución de la reserva. En un seguro diferido por 20 años, que se promete pagar con 10 primas, durante los 10 primeros años la reserva crece por la capitalización actuarial y por las primas; durante los siguientes 10 años, la reserva crece sólo por la capitalización; a partir de los 20 años, la reserva decrece, como si se estuviera amortizando el saldo de una deuda. Sin embargo, este comportamiento diferente por tramos, no hace necesario tener que definir una ecuación en diferencia para cada tramo. La solución de la ecuación para el seguro de vida entera se puede adecuar fácilmente a los otros tipos de seguros, tomando como valor inicial de la función, el valor final del tramo anterior como se verá más adelante.

Hay un caso en que el comportamiento es el mismo: cuando la vigencia material de las primas coincide con la vigencia material del seguro. Por ejemplo, en un seguro de vida entera, pagado con una renta vitalicia ilimitada. Anali-

zaremos este caso, planteando la ecuación en diferencia y buscando la respectiva solución. En el caso que nos ocupa, g_k es una función lineal de la forma:

$$g_k = \alpha a_k + \beta$$

En consecuencia, el argumento de la sumatoria de la solución general toma la forma:

$$\frac{\alpha a_j}{u_{j+1}} + \frac{\beta}{u_{j+1}} = \frac{\alpha}{u_j} + \frac{\beta}{u_{j+1}}$$

Estas expresiones se simplifican si se particulariza la expresión de u_j . En todas las expresiones recursivas de la reserva matemática, el coeficiente a_k es el factor de capitalización actuarial. Si se tiene en cuenta la [11], u_k es un factor de capitalización múltiple de la forma:

$$u_k = \frac{D_x}{D_{x+k}}$$

con lo que el argumento de la sumatoria de la solución general resulta:

$$\frac{\alpha}{u_j} + \frac{\beta}{u_{j+1}} = \alpha \frac{D_{x+j}}{D_x} + \beta \frac{D_{x+j+1}}{D_x}$$

La sumatoria se expresa, entonces:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_j}{u_{j+1}} = \alpha \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} + \beta \frac{N_{x+1} - N_{x+k+1}}{D_x}$$

Como además el valor inicial de la reserva matemática es nulo, de la aplicación de la expresión [10] resulta:

$$V_k = \frac{D_x}{D_{x+k}} \left[\alpha \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} + \beta \frac{N_{x+1} - N_{x+k+1}}{D_x} \right]$$

$$V_k = \frac{\alpha k a_x + \beta k a_x}{k E_x} \quad [12]$$

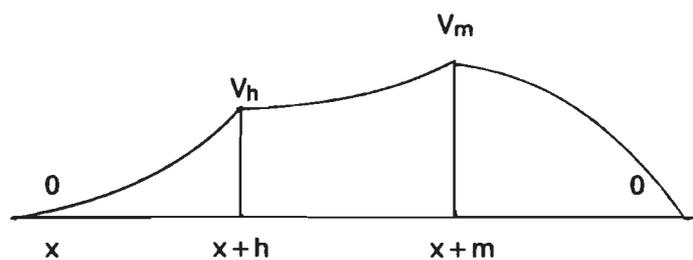
Los coeficientes α y β resultan de dar a la expresión recursiva la forma canónica de la ecuación en diferencia:

$$\begin{aligned} V_{k+1} - (1 + s_{x+k}) V_k &= P (1 + s_{x+k}) - C \rho_{x+k} - C + C \\ &= P (1 + s_{x+k}) - C (1 + \rho_{x+k}) + C \\ &= P (1 + s_{x+k}) - C v (1 + s_{x+k}) + C \\ V_{k+1} - (1 + s_{x+k}) V_k &= (P - C v) (1 + s_{x+k}) + C \end{aligned}$$

La expresión final se obtiene reemplazando en la [12] los valores de α y β :

$$V_k = \frac{(P - C v) k a_x + C k a_x}{k E_x} \quad [13]$$

Para los otros tipos de seguro puede adecuarse la solución general. Para ello, basta tener en cuenta lo que dice la Profesora María Juana Frare de Cacciaguerra en su trabajo "Las primas equivalentes", incluido en los Anales de las IX Jornadas Nacionales de Matemática Financiera: la reserva matemática en el período k es la prima pura única para contratar una operación con las mismas características, a la edad $x+k$, si se ha cumplido con el pago de todas las primas. Si un seguro diferido por m años, que se paga con h primas, con m mayor que h , el comportamiento de la evolución de la reserva es distinto en los tres tramos:



Para los h primeros años, vale la expresión [13], anulando C . Para el segundo tramo, comprendido entre los períodos $h+1$ y m , debe sumarse en el

numerador de la [13] la reserva V_h , como valor inicial de la función, cambiando la edad de contratación x por $x+h$ y anulando P y C . En el tercer y último tramo, debe tomarse como valor inicial de la función la reserva V_m , habrá que cambiar la edad de contratación x por $x + m$ y anular la prima P .

A todas las rentas vitalicias es aplicable la solución general de la misma ecuación en diferencia. Si una renta de término J , diferida por m años, se contrata mediante el pago de m primas P , es aplicable la [12] haciendo α igual a P y β igual a J . El comportamiento de la reserva no es el mismo antes que después del período m . Hasta el período m , el valor inicial de la función es nulo y debe anularse J . En el segundo tramo el valor inicial de la función es la reserva V_m , debiendo anularse P y habrá que sustituir la edad x por la edad $x + m$.